Людмила Алексеевна Рузина

МОУ СОШ №1 с углубленным изучением отдельных предметов г.Воронеж

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АЛГЕБРЕ

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Г.Галлилей

Геометрию и алгебру зачастую воспринимают как два различных предмета, забывая, что это составляющие части одного целого. Еще Платон высказывал мудрые слова: «Геометрия есть познание всего сущего».

Геометрический подход к решению различного вида алгебраических задач имеет определенные преимущества. Очень многие текстовые задачи на составление уравнений, систем уравнений можно решать графически. Это задачи на движение, на совместную работу.

У учащихся 9х, 11х классов при итоговой аттестации большие затруднения вызывает именно решение задач такого типа. Поэтому можно рекомендовать ученикам этот способ решения задач как один из вариантов решения. Ведь многие формулы алгебры и тригонометрии были получены в результате построения геометрических образов.

Навыки решения текстовых задач таким методом пригодятся на уроках физики, где часто практикуются графические подходы к решению задач на движение. Но чаще всего требуют нестандартных подходов решение олимпиадных задач, задач на выпускных и вступительных экзаменах.

Рассмотрим применение геометрического подхода к решению алгебраических задач на конкретных примерах.

Пример 1

На двух копировальных машинах, работающих одновременно, можно сделать копию пакета документов за 10мин. За какое время можно выполнить эту работу на каждой машине в отдельности, если известно, что на первой ее можно сделать на 15 минут быстрее, чем на второй?

Решение

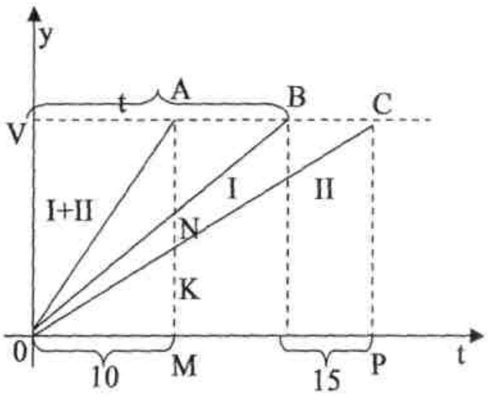


Рисунок 1

На оси абсцисс откладываем время работы копировальных машин в минутах (рис.1). Обе машины, работая вместе, сделают копию за 10 минут (OM=10). Тогда одной первой для этого понадобится t минут, а одной второй – (t+15) минут. Положение точки V на оси ординат соответствует объему работы, которую необходимо выполнить.

Так как объем работы прямо пропорционален затраченному времени, то графики работы копировальных машин представляют собой отрезки: OB – график работы первой, OC – график работы второй, OA – график совместной работы.

Рассмотрим две пары подобных треугольников $\Delta OVB \sim \Delta NAB$ и $\Delta OPC \sim \Delta OMK$, откуда:

$\frac{VO}{AN} = \frac{VB}{AB}$ (1) и $\frac{CP}{KM} = \frac{OP}{OM}$ (2)

Покажем, что AN=KM. За 10 минут первая машина выполнит часть работы, соответствующую отрезку NM (AN-отрезок работы, который выполнит вторая машина). Но за 10 минут вторая машина выполнит часть работы, соответствующую MK. Поэтому AN=KM. Учитывая это равенство и то, что CP=VO, получаем $\frac{VO}{AN} = \frac{CP}{KM}$. Из пропорций (1) и (2) получаем соотношение $\frac{VB}{AB} = \frac{OP}{OM}$, из которого легко перейти к уравнению $\frac{t}{t-10} = \frac{t+15}{10}$.

Решая это уравнений, находим положительный корень t=15. Таким образом, первая машина сделает копию пакета документов за 15минут, а вторая - за 30 минут. Ответ: 15мин, 30мин.

Пример 2

Два всадника выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Один прибывает в B через 27 минут после встречи, а другой прибывает в A через 12 минут после встречи. За сколько минут проехал каждый всадник свой путь?

Решение

Рассмотрим две системы координат tAy и $t'By'$. На оси At откладываем время движения первого всадника, а на оси Bt′ – время движения второго всадника. Оси At и Bt сонаправлены. Оси пройденного пути противоположно направлены, а длина отрезка AB в каждом случае равна пройденному пути.

Отрезок AB_1- график движения первого всадника, отрезок BA_1- график движения второго (рис.2).

Точка O соответствует моменту их встречи. Время движения всадников до встречи обозначим t. Из геометрических соображений ясно, что $\Delta B_1OM \sim \Delta AON$ и $\Delta BOM \sim \Delta NOA_1$.

Тогда $\frac{MB_1}{AN} = \frac{MO}{ON}$ и $\frac{BM}{NA_1} = \frac{MO}{ON}$. Из равенств следует: $\frac{27}{t} = \frac{t}{12}$, откуда t=18.

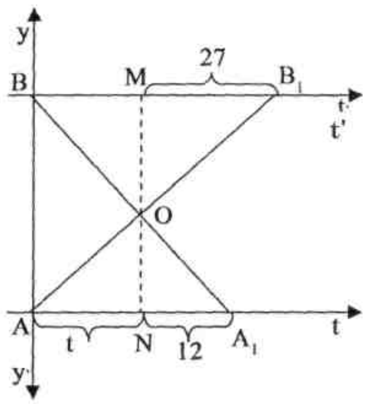


Рисунок 2

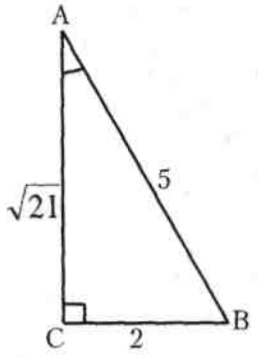
Таким образом, первый всадник проехал весь путь за 18+12=30 минут, а второй за 18+27=45 минут. Ответ: 30 мин, 45 мин.

Этот метод также хорош при упрощении тригонометрических выражений и при нахождении области значений тригонометрических функций на заданном промежутке. Рассмотрим на примере.

Пример 3

Найдите значение выражения $\sqrt{21}\,\mathrm{tg}(arcsin\frac{2}{5})$.

Решение



По определению арксинуса имеем: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, причем если x≥0, то 0$\leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. Построим прямоугольный треугольник АВС с углом А, который равен $\arcsin \frac{2}{5}$. При этом, по теореме Пифагора, прилежащий катет будет равен $\sqrt{21}$. Поэтому tg(acrsin $\frac{2}{5}$)= $\frac{CB}{AC}$ =$\frac{2}{\sqrt{21}}$ и $\sqrt{21}$tg(arcsin $\frac{2}{5}$) = $\sqrt{21}$*$\frac{2}{\sqrt{21}}$ = 2.

Ответ: 2

Список литературы

1. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11кл./А. Г. Мордкович: учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Мнемозина, 2007
2. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс/ Кузнецова Л. В., Бунимович Е. А., Пигарев Б. П., Суворова С. Б..- 5-е изд., перераб. и доп.- М.:Дрофа, 2000
3. Единый государственный экзамен. Математика. Варианты контрольных измерительных материалов. Министерство образования РФ.- М.: Центр тестирования Минобразования России, 2002
4. Березин В.Н. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике / Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская И. Л.: кн. для учителя.- М.: Просвещение, 1985.