

Ловушкина Светлана Николаевна

Санкт-Петербургское государственное бюджетное

образовательное учреждение среднего профессионального образования

«Политехнический колледж городского хозяйства»

ОТКРЫТЫЙ ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ДВУХЧАСОВОЙ УРОК.
ТЕМА: «ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ»

Общедидактическая цель урока:

раскрытие практической необходимости и теоретической значимости темы;
осмысление связей и отношений в объектах изучения.

Тип урока по общедидактической цели: семинар-практикум.

Образовательные аспекты урока:

обсуждение возможностей применения элементов дифференциального исчисления в описании и изучении процессов и явлений реального мира;
использование механического истолкования производной при решении задач, связанных с физическим смыслом;
расширение области знаний учащихся и введение понятия производной второго порядка, используя его физический смысл.

Развивающие аспекты:

развитие логического мышления при установлении связи физических величин с понятием производной;
развитие монологической речи в ходе объяснений, обоснование выполняемых действий;
развитие навыков самостоятельной работы.



Воспитательные аспекты урока:

формирование умений школьников по организации и проведению дискуссии по обсуждаемым вопросам;

воспитание ответственности и серьёзного отношения к занятиям.

Формы организации познавательной деятельности:

фронтальная, групповая, индивидуальная.

Методы обучения:

по источнику приобретённых знаний – словесные, практические, наглядные;

по уровню познавательной активности – частично поисковый, тестовая проверка уровня знаний, самопроверка, взаимопроверка.

Оборудование и источники информации:

Компьютер, проектор, портреты Готфрида Лейбница, Исаака Ньютона, Жозефа Лагранжа, Пьера Ферма, Огюстена Коши, карточки-тестовые задания, карточки-кроссворд, оценочный лист участников семинара (оценивается работа первой части урока), листы с текстами 16-ти задач для практической части семинара.

«Алгебра и начала анализа» - учебник для 10-11кл. под редакцией А.Н. Колмогорова, /А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницин, Б.М Ивлев, С.И. Шварцбурд. Москва «Просвещение» 2008,

«Алгебра и начала анализа» - учебник для 10-11кл - 4 изд. /М.И.Башмаков М. Просвещение, 1998.

В.С. Крамор «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа» Москва «Просвещение» 1990,

Ивлев Б.М. и др. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класс – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2000,

Ю.М Колягин, Г.Л. Луканкин «Основные понятия современного школьного курса математики» Москва «Просвещение» 1974,



Глейзер Г.И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982,

Приложение к газете «Первое сентября» «Математика» - №14, 2000г.

К семинару учащиеся готовят вопросы:

1. О происхождении терминов «производная» и «предел» и их обозначений.
2. Определение производной на языке механики. Геометрический смысл производной.
3. Дифференциал и касательная.
4. Дифференциал в физике.
5. Применение производной в технике.

План урока

1. Оргмомент. Вступительное слово учителя.
2. Заслушивание сообщений учащихся по примерам применения производных. Отгадывание кроссворда. Оценка результатов.
3. Задание на дом.
4. Решение упражнений из учебника № 267(а,б,в), № 278 (фронтальная работа, индивидуальная, групповая). Оценка результатов.
5. Тестовый контроль знаний (двухвариантный). Оценка.
6. Итог первой части урока.
7. Практикум. Решение задач. Фиксирование ответов в таблицу. Сдача тетрадей с решениями на проверку.



Ход урока

1 этап урока. Учитель открывает урок. *Слайды № 1, 2.*

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь следующих двух: определения скорости прямолинейного движения и построения касательной к прямой. Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц открыли основные законы, которыми мы пользуемся в настоящее время. И. Ньютон в основном опирался на физическое представление о мгновенной скорости движения, считая его очевидным и сводя к нему другие случаи производной, а Г. Лейбниц использовал понятие бесконечно малой.

Исчисление созданное Ньютоном и Лейбницем, получило название дифференциального исчисления. С его помощью был решен ряд задач теоретической механики, физики и астрономии. В частности, используя методы дифференциального исчисления, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVIII в. с помощью тех же методов математики изучали в XVII и XVIII вв. различные кривые, нашли кривую, по которой быстрее всего падает материальная точка, научились находить кривизну линий. Большую роль в развитии дифференциального исчисления сыграл Л. Эйлер, написавший учебник «Дифференциальное исчисление».

Основные понятия дифференциального исчисления долгое время не были должным образом обоснованы. Однако в начале XIX в. французский математик О. Коши дал строгое построение дифференциального исчисления на основе понятия предела.

Применяемая сейчас система обозначений для производной восходит к Лейбницу и Лагранжу.

В настоящее время понятие производной находит большое применение в различных областях науки и техники.



Сегодня на уроке мы повторим определение производной, послушаем тех из Вас, кто подготовил выступления по теме семинара и на примере некоторых задач покажем, как при помощи производной и родственных понятий можно решать другие задачи. **2 этап урока.**

Заслушивание сообщений 3 – 4 учащихся по примерам применения производных.

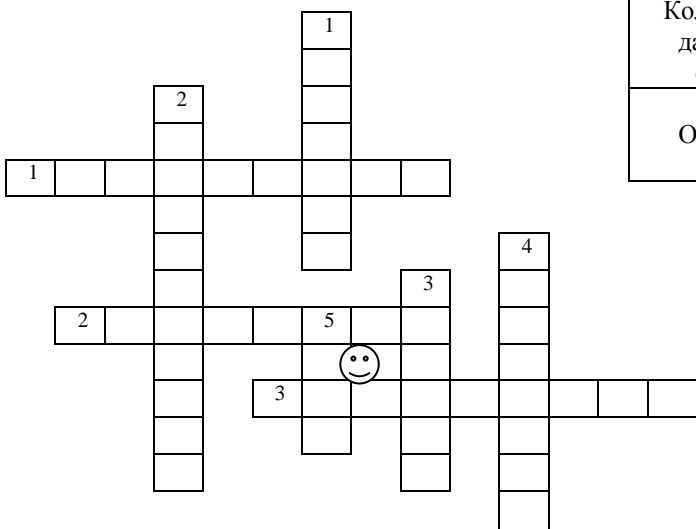
(Домашнее задание, темы: «Определение производной на языке механики. Геометрический смысл производной», «Связь свойств функции и её производной на наглядном уровне с использованием механической интерпретации», «Дифференциал и касательная», «Дифференциал в физике (работа по перемещению, заряд, масса тонкого стержня, теплота, работа как функция по времени)»). **Обсуждение – диалог.**

В заключении (как итог всему сказанному) *просмотр слайдов № 3 - № 9.*

Отгадывание кроссворда. *Слайд № 10.*

Оценка результатов. *Слайд № 11.*

Кроссворд



Кол. отгаданных слов	1	2	3	4	5	6	7	8
Оценка	0	1	2	3	3	4	4	5

По вертикали:

1. Создатель дифференциального исчисления, использовавший понятие бесконечно малой.

2. Коэффициент пропорциональности между бесконечно малыми изменениями взаимосвязанных величин.

3. Создатель дифференциального исчисления, опирающийся на физическое представление о мгновенной скорости, считавший его очевидным и сводящий к нему другие случаи производной.

4. Производная от работы по времени.

5. Производная от количества электричества по времени - ...?.... тока.

По горизонтали:

1. Производная от скорости по времени.

2. Производная от пути по времени.

3. Производная от массы неоднородного стержня по длине – линейная?..... .

3 этап урока.

Задание на дом: Слайд №12

Учитель: откройте страницу 137 учебника, рис.100.

На следующем уроке мы продолжим разговор о применении производной в оптике, обсудим геометрический смысл производной.

По учебнику прошу разобрать решение примера 7, где идёт речь о параболическом зеркале.

В каком хорошем, добром, отечественном фильме про любовь мы видим изготовленное руками доктора физико-математических наук такое зеркало для приготовления пицци?



(«Три плюс два»).

Все лучи, параллельные оси параболического зеркала после отражения сходятся в одной точке. Это и доказывается в примере 7.

Как называется эта точка?

С рассказа об этой замечательной точке, где в примере 7 используется производная, в каких сложных оптических приборах применяется параболическое зеркало, мы поговорим на следующем уроке.

Запишите в дневник стр.137 пример 7, №269, 270, 271.

4 этап урока. Слайд № 13 – текст задач. Слайд №14 – решения задач.

Фронтальная работа. Обсуждение решения задач №267(а,б,в), №276(а.б).

Индивидуальная работа – решение и самопроверка.

№267 а). $V(t) = -t^2 + 4t + 5$.

б). $V(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5 = 9 \text{ м/с}$.

в) $V(t) = 0, -t^2 + 4t + 5 = 0$,

$$t_1 = -1, t_2 = 5.$$

- $1 < 0$, не удовлетворяет условию

задачи.

Ответ: а) $V(t) = -t^2 + 4t + 5$, б) 9 м/с, в) через 5

секунд.

Оценка: 5 заданий – «5»,

4 задания – «4»,

3 задания – «3»,

2 задания – «2»,

1 задание – «1».

№268

$$x(t) = t^3 - 4t^2,$$

$$v(t) = x'(t) = 3x^2 - 8t, \quad v(5) = 35 \text{ (м/с);}$$

$$a(t) = x''(t) = 6x - 8? \quad a(5) = 22 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: а) $v(5) = 35 \text{ (м/с)}$, б) $a(5) = 22 \text{ (м/с}^2\text{)}$.

5 этап урока.**Тест (работа на 2 варианта).**

Раздаточный материал в виде карточек - заданий . *Слайд №15 (заставка на время выполнения работы).* *Слайд №16 - ответы к тесту.*

Вариант 1

- В чём сущность физического смысла $s'(t)$ (первая производная пути по времени) ?
 А. Скорость. Б. Ускорение.
 В. Угловой коэффициент. Г. Не знаю.
- Точка движется по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент $t_0 = 1$ с ?
 А.15. Б.12. В.9. Г.3.
- Зависимость пути S от времени движения выражается формулой $S = \frac{gt^2}{2}$. Назовите формулу ускорения.
 А. $\frac{2gt}{2}$. Б. $2gt$. В. gt . Г. g .
- Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 1$. В какие моменты времени её скорость будет равна нулю ?
 А.1 и 3. Б.1 и 4. В.2. Г.2 и 1.
- Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется по формуле $V(t) = 5t^3 + t^2$. Чему равно ускорение тела в момент времени $t_0 = 1$ с ?
 А.17. Б.32. В.30. Г.16.

Вариант 2

- В чём сущность физического смысла $s''(t)$ (вторая производная пути по времени)?
 А. Скорость. Б. Ускорение.
 В. Угловой коэффициент. Г. Не знаю.
- Точка движется по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равно ускорение в момент $t_0 = 1$ с ?
 А.15. Б.12. В.9. Г.3.
- Зависимость пути S от времени движения выражается формулой $S = \frac{gt^2}{2}$. Назовите формулу скорости.
 А. $\frac{2gt}{2}$. Б. $2gt$. В. gt . Г. g .
- Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 1$. В какие моменты времени её ускорение будет равно нулю ?
 А.1 и 3. Б.1 и 4. В.2. Г.2 и 0.
- Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется по формуле $V(t) = 15t^2 + 2t$. Чему равно ускорение тела в момент времени $t_0 = 1$ с ?
 А.17. Б.32. В.30. Г.16.

Ответы к тесту:					
<i>Вариант 1</i>	А	Г	Г	А	А
<i>Вариант 2</i>	Б	Б	В	В	Б

Подведение итогов первой части урока. Слайд №17

**Оценочный лист участников семинара – практикума
«Применение производной в физике и технике»**

№ п/п	Ф.И.О. учащегося	Выступление	Кроссворд	Решение задач из учебника	Результат тестирования	итог
1						
2						
3						
4						
5						

Вторая часть урока – решение задач.

Каждому ученику выдается лист с текстами задач. Работа одновариантная, в парах. Тетради с решениями сдаются учителю на проверку.

К каждой задаче даётся указание, в котором дан подробный план решения. Прилагаются критерии оценивания работы и таблица для записи ответов.

а) лист (двухсторонняя печать. формат А4) с текстами задач, указаниями по решению;

критерии оценивания, таблица для записи ответов к задачам;

б) решения задач.

Применение производной в физике и технике	
Задача 1. Материальная точка движется по прямой по закону $S(t) = 8t - t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.	Указание: $V(t) = S'(t)$, $V(3) - ?$ $a(t) = V'(t)$, $a(3) - ?$
Задача 2. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v_0 , движется по закону $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите наибольшую высоту, которую достигнет тело, если $v_0 = 50 \text{ м/с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.	$h'(t) - ?$, $h'(t) = 0$, $t - ?$ $h(t) - ?$
Задача 3. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 + 11t^2 + 8$ (x измеряется в метрах, t в секундах). Напишите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и вычислите её при $t = 2$.	Указание: $V(t) = x'(t)$, $V(2) - ?$
Задача 4. Основание параллелограмма a изменяется по закону $a = 3 + 7t$, а высота b по закону $b = 3 + 8t$. Вычислите скорость изменения его площади в момент $t = 4$ с. (Основание a и высота b измеряются в сантиметрах).	Указание: $S(t) = a \cdot b$, $S'(t) - ?$, $S'(4) - ? (\text{см}^2/\text{с})$
Задача 5. Радиус круга R изменяется по закону $R = 2 + t^2$. С какой скоростью изменяется его площадь в момент $t = 3$ сек, если радиус круга измеряется в сантиметрах.	Указание: $S = \pi R^2$, $S'(t) - ?$, $V(t) = S'(t)$, $V(3) - ? (\text{см}^2/\text{с})$
Задача 6. Материальная точка массой 2 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 9t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$, где S – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите силу, действующую на неё в момент $t = 3$ с.	Указание: $F = m \cdot a$, $a(t) = S''(t)$, $a(3) - ?$, $F - ? (\text{н})$.
Задача 7. Тело, выпущенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью V_0 движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h – высота в метрах, t – время в секундах. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 4 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 3 \text{ м}$, $V_0 = 5 \text{ м/с}$, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.	Указание: $V(t) = h'(t)$ – скорость движения тела. Найти момент времени t , когда $V(t) < V_0$ в 4 раза. (из уравнения: $4V(t) = V_0$). $h(t) - ? (\text{м})$



<p>Задача 8. Маховик задерживаемый тормозом, поворачивается за t_c на угол $\alpha(t) = 4t - 0,2t^2$ (рад). Найдите: а) угловую скорость вращения маховика в момент $t = 6$с; б) в какой момент маховик остановится?</p>	<p>Указание: $\omega(t) = \alpha'(t)$, $\omega(6) - ?$ (рад/с). $\omega(t) = 0$, $t - ?$</p>
<p>Задача 9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t$, где S – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите: а) момент времени t, когда ускорение точки равно 0; б) скорость, с которой движется точка в этот момент времени. Задача 10. Точка массой m_0 движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{(t-3)^2}$. Докажите, что действующая на неё сила пропорциональна квадрату пройденного пути.</p>	<p>Указание: $a(t) = S''(t)$; $a(t) = 0$, $t - ?$, $V(t) = S'(t)$, $V(3) - ?$ (м/с). Указание: $F = m_0 \cdot S''(t)$.</p>
<p>Задача 11. Точка массой m_0 движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{3t-1}$. Докажите, что действующая на неё сила пропорциональна кубу пройденного пути.</p>	<p>Указание: $F = m_0 \cdot S''(t)$.</p>
<p>Задача 12. Известно, что тело массой $m = 5$кг движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2$. Найдите кинетическую энергию тела через 2с после начала движения.</p>	<p>Указание: $E(t) = \frac{mV^2}{2}$, $V(t) = S'(t)$, $E(2) - ?$ (Дж)</p>
<p>Задача 13. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением: $I = 2t^2 - 5t$. Найдите скорость изменения тока в момент времени $t = 10$с.</p>	<p>Указание: $I'(t) - ?$ $I'(10) - ?$ (А/с)</p>
<p>Задача 14. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1 = 2,5t^2 - 6t + 1$, $S_2 = 0,5t^2 + 2t - 3$. В какой момент скорости их равны?</p>	<p>Указание: $V_1(t) = S_1'(t)$, $V_2(t) = S_2'(t)$, $V_1(t) = V_2(t)$, $t - ?$</p>
<p>Задача 15. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1 = t^2 - 6t + 2$, $S_2 = 4t + 5$. В какой момент времени скорость первой точки будет в два раза больше скорости второй?</p>	<p>Указание: $V_1(t) = S_1'(t)$, $V_2(t) = S_2'(t)$, $V_1(t) > V_2(t)$ в 2 раза. $t - ?$</p>
<p>Задача 16*. Под каким углом надо сделать въезд на мост, если его высота 10 м, пролёт 120 м ?</p>	<p>Указание: необходимо ввести прямоугольную систему координат и рассмотреть график функции $y = ax^2 + b$, $b = 10$; найти a, если $x = 60$; найти $y'(x)$, $y'(60)$; $y'(x) = \text{tg } \varphi$, $\text{tg } \varphi = y'(-60)$, $\varphi \approx ?$</p>



Критерии оценивания: 7 - 9 задач – оценка «3», 10 -13 задач – оценка «4», 14 - 15 задач – оценка «5»

Примечание: задача №16 выполняется по желанию учащегося, выполнившего первые 15 задач, и оценивается дополнительной оценкой.

Ответы к задачам:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	ИТОГ: правильно решено _____ задач. Оценка: _____			

Ответы, тексты и решение задач практической части семинара-практикума

«Применение производной в физике, технике»

Критерии оценивания: 7 - 9 задач – оценка «3», 10 -13 задач – оценка «4», 14 - 15 задач – оценка «5»

Примечание: задача №16 выполняется по желанию учащегося, выполнившего первые 15 задач, и оценивается дополнительной оценкой.

Ответы к задачам:

1 $v(3) = -19,$ $a(3) = -18.$	2 $h(5) = 125$	3 $v(t) = 12t^2 + 22t$ $v(2) = 92 \text{ м/с}$	4 $S'(4) = 493 \text{ см}^2/\text{с}$	5 $v(3) =$ $132\pi \text{ см}^2/\text{с}$
6 $F = 8\text{Н}$	7 $h(0,375) \approx 4,2 \text{ м}$	8 $\omega(6) = 1,6 \text{ рад/с},$ $t = 10\text{с}$	9 $t = 3 \text{ с},$ $v(3) = 13 \text{ м/с}$	10 $F = 6m_0S^2(t)$
11 $F = 18m_0S^3(t)$	12 $E(2) = 40 \text{ Дж}$	13 $I'(t) = 35 \text{ А/с}$	14 $t = 2$	15 $t = 7$
16 $\varphi = \arctg \frac{1}{3}$ $\varphi \approx 18^\circ 26'$	ИТОГ: правильно решено _____ задач. Оценка: _____			

Задача 1. Материальная точка движется по прямой по закону $S(t) = 8t - t^3$.

Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

Решение:

$$S(t) = 8t - t^3.$$

$$V(t) = S'(t) = 8 - 3t^2, \quad V(3) = 8 - 27 = -19;$$

$$a(t) = V'(t) = -6t, \quad a(3) = -18.$$

Ответ: -19, -18.

Задача 2. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v_0 , движется по

закону $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где h – путь в метрах, t – время в секундах. Найдите

наибольшую высоту, которую достигнет тело, если $v_0 = 50 \text{ м/с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение:

$$h'(t) = ?, \quad h'(t) = v_0 - gt, \quad v_0 = 50 \text{ м/с}, \quad g = 10 \text{ м/с}^2.$$

$$h'(t) = 0, \quad h'(t) = 50 - 10t, \quad h'(t) = 0, \quad 50 - 10t = 0, \quad t = 5;$$

$t = ?$

$$h(t) = ? \quad h(5) = 125$$

Ответ: 125 м.

Задача 3. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^3 + 11t^2 + 8$ (x измеряется в метрах, t в секундах). Напишите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и вычислите её при $t = 2$.

Решение:

$$V(t) = x'(t), \quad V(t) = x'(t) = 12t^2 + 22t;$$

$$V(2) = ? \quad V(2) = 92 \text{ м/с}$$

Ответ: $12t^2 + 22t$; 92 м/с.



Задача 4. Основание параллелограмма a изменяется по закону $a = 3 + 7t$, а высота b по закону $b = 3 + 8t$.

Вычислите скорость изменения его площади в момент $t = 4$ с. (Основание a и высота b измеряются в сантиметрах).

Решение:

$$S(t) = a \cdot b, \quad S(t) = (3+7t)(3+8t) = 56t^2 + 45t + 9;$$
$$S'(t) = ?, \quad S'(t) = 112t + 45; \quad S'(4) = 493 \text{ см}^2/\text{с}.$$
$$S'(4) = ? \text{ (см}^2/\text{с)}$$

Ответ: 493 см²/с.

Задача 5. Радиус круга R изменяется по закону $R = 2 + t^2$.

С какой скоростью изменяется его площадь в момент $t = 3$ сек, если радиус круга измеряется в сантиметрах.

Решение:

$$S = \pi R^2,$$
$$S(t) = ?, \quad S(t) = \pi(2+t^2)^2;$$
$$V(t) = S'(t), \quad V(t) = 2\pi(2+t^2)(2+t^2)' = 4\pi t(2+t)^2; \quad V(3) = 132\pi \text{ (см}^2/\text{с)}.$$
$$V(3) = ?$$

Ответ: 132π см²/с.

Задача 6. Материальная точка массой 2 кг движется прямолинейно по закону

$S(t) = 9t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$, где S - путь в метрах, t – время в секундах. Найдите силу,

действующую на неё в момент $t = 3$ с.

Решение:

$$F = m \cdot a,$$
$$a(t) = S''(t), \quad a(t) = S''(t) = (9 - 2t + t^2)' = -2 + 2t; \quad a(3) = 4,$$
$$a(3) = ?, \quad F = 4m, \quad m = 2 \text{ кг}, \quad F = 8 \text{ (н)}.$$
$$F = ?$$

Ответ: 8 н.



Задача 7. Тело, выпущенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью V_0 движется по закону

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } h - \text{высота в метрах, } t - \text{ время в секундах. Найдите}$$

высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 4 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 3\text{ м}$,

$$v_0 = 5\text{ м/с}, g \approx 10\text{ м/с}^2.$$

Решение:

$$V(t) = h'(t) - \text{ скорость движения тела. } V(t) = v_0 - gt = 5 - 10t;$$

Найдём момент времени t , когда $V(t) < V_0$ в 4 раза (из уравнения: $4V(t) = V_0$).

$$4(5 - 10t) = 5,$$

$$5 - 10t = \frac{5}{4},$$

$$t = 0,375.$$

$$h(t) - ? (\text{м}) \quad h(t) = 3 + 5 \cdot 0,375 - 5 \cdot (0,375)^2 = 3 + 5 \cdot 0,375(1 - 0,375) = 4,171875 \approx 4,2$$

(м).

Ответ: 4,2 м.

Задача 8. Маховик задерживаемый тормозом, поворачивается за t_c на

угол $\alpha(t) = 4t - 0,2t^2$ (рад). Найдите:

а) угловую скорость вращения маховика в момент $t = 6\text{ с}$;

б) в какой момент маховик остановится?

Решение:

$$\text{а) } \omega(t) = \alpha'(t), \quad \omega(t) = \alpha'(t) = 4 - 0,4t; \quad \omega(6) = 4 - 0,4 \cdot 6 = 1,6 \text{ (рад/с)},$$

$$\text{б) } \omega(t) = 0, \quad t - ? \quad 4 - 0,4t = 0, \quad t = 10(\text{с}).$$

Ответ: 1,6 рад/с, 10 с.



Задача 9. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t, \text{ где } S - \text{ путь в метрах,}$$

t – время в секундах. Найдите:

- момент времени t , когда ускорение точки равно 0;
- скорость, с которой движется точка в этот момент времени.

Решение:

$$a(t) = S''(t); \quad a(t) = (-t^2 + 6t + 4)' = -2t + 6,$$

$$a(t) = 0, \quad t = ?, \quad -2t + 6 = 0, \quad t = 3(\text{с}).$$

$$V(t) = S'(t), \quad V(3) = ? \text{ (м/с)}. \quad V(t) = -t^2 + 6t + 4, \quad V(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = 13 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 3с, 13м/с.

Задача 10. Точка массой m_0 движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{(t-3)^2}$.

Докажите, что действующая на неё сила пропорциональна квадрату пройденного пути.

Решение:

$$a(t) = S''(t); \quad F = m_0 \cdot S''(t)$$

$$S'(t) = ((t-3)^{-2})' = -2 \cdot (t-3)^{-3}$$

$$S''(t) = 6(t-3)^{-4} = \frac{6}{(t-3)^4}.$$

$$F = \frac{6m_0}{(t-3)^4} = 6m_0 \left[\frac{1}{(t-3)^2} \right]^2 = 6m_0 S^2(t).$$

Ответ: $F = 6m_0 S^2(t)$.



Задача 11. Точка массой m_0 движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{3t-1}$.

Докажите, что действующая на неё сила пропорциональна кубу пройденного пути.

Решение:

$$S'(t) = \left[(3t-1)^{-1} \right]' = -3(3t-1)^{-2};$$
$$F = m_0 \cdot S''(t). \quad S''(t) = \left[-3(3t-1)^{-2} \right]' = 18(3t-1)^{-3} = \frac{18}{(3t-1)^3}.$$
$$F = \frac{18m_0}{(3t-1)^3} = 18m_0 \cdot \left[\frac{1}{3t-1} \right]^3 = 18m_0 S^3(t).$$

Ответ: $F = 18m_0 S^3(t)$.

Задача 12. Известно, что тело массой $m = 5$ кг движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2$. Найдите кинетическую энергию тела через 2с после начала движения.

Решение:

$$E(t) = \frac{mV^2}{2},$$

$$V(t) = S'(t), \quad E(2) = ? \text{ (Дж)}$$

$$V(t) = (t^2 + 2)' = 2t;$$

$$E(t) = \frac{mV^2}{2} = \frac{m \cdot (2t)^2}{2} = 2mt^2;$$

$$E(2) = 8m \text{ (Дж)};$$

Если $m = 5$ (кг), то $E(2) = 8 \cdot 5 = 40$ (Дж)

Ответ: 40 Дж.



Задача 13. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением: $I = 2t^2 - 5t$. Найдите скорость изменения тока в момент времени $t = 10$ с.

Решение:

$$I'(t) - ?$$

$$I'(10) - ? \text{ (A/c)}$$

$$V(t) = I'(t) = 4t - 5;$$

$$I'(10) = 4 \cdot 10 - 5 = 35 \text{ (A/c)}.$$

Ответ: 35 A/c.

Задача 14. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам:

$$S_1 = 2,5t^2 - 6t + 1, \quad S_2 = 0,5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент скорости их равны?

Решение:

$$V_1(t) = S_1'(t), \quad V_2(t) = S_2'(t),$$

$$V_1(t) = S_1'(t) = 5t - 6,$$

$$V_2(t) = S_2'(t) = t + 2,$$

$$V_1(t) = V_2(t), \quad t - ?$$

$$5t - 6 = t + 2, \quad t = 2.$$

Ответ: $t = 2$.

Задача 15. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам:

$$S_1 = t^2 - 6t + 2, \quad S_2 = 4t + 5.$$

В какой момент времени скорость первой точки будет в два раза больше скорости второй?

Решение:

$$V_1(t) = S_1'(t), \quad V_2(t) = S_2'(t),$$

$$V_1(t) = S_1'(t) = 2t - 6,$$

$$V_2(t) = S_2'(t) = 4,$$

$$V_1(t) > V_2(t) \text{ в 2 раза.}$$

$$2t - 6 = 2 \cdot 4,$$

$$t - ?$$

Ответ: $t = 7$.



Задача 16. Под каким углом надо сделать въезд на мост, если его высота 10 м, пролёт 120 м ?

Решение: необходимо ввести прямоугольную систему координат и рассмотреть график функции $y = ax^2 + 10$, графиком является парабола, ветви направлены вниз;

$$b = 10; \quad 0 = a \cdot 60^2 + 10; \quad a = -\frac{1}{360};$$

$$y(x) = -\frac{1}{360} \cdot x^2 + 10; \quad y'(x) = -\frac{x}{180}. \quad \operatorname{tg} \varphi = y'(-60) = \frac{1}{3}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Ответ : $\varphi \approx 18^\circ 26'$

