Маховер Михаил Сергеевич

Государственное бюджетное образовательное учреждение

«Гимназия №11» Василеостровского района Санкт-Петербурга

Жувикина Ирина Алексеевна

Государственное бюджетное образовательное учреждение

средняя школа №352 Красносельского района Санкт-Петербурга

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНВЕРСИИ ОТНОСИТЕЛЬНО КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

При подготовке школьников к сдаче единого государственного экзамена по математике профильного уровня нередко приходится сталкиваться с тем, что ученик затрудняется представить себе, как выглядит график той или иной функции. Ученик более-менее уверенно отвечает, как выглядит «просто парабола» или «просто синусоида». Однако быстро перейти от «просто параболы» к графику конкретной функции оказывается почти невыполнимой задачей. Ситуация осложняется тем, что у многих учащихся даже в 11 классе сохраняется уверенность, что графики функций надо строить «по точкам». Как следствие, учащийся затрудняется быстро «прикинуть» основные свойства этой функции, такие как область определения и, особенно, область ее значений. Поэтому наблюдается недостаточное понимание таких необходимых для сдачи ЕГЭ понятий, как наибольшее и наименьшее значение функции. Вместе с тем участнику профильного ЕГЭ по математике необходимо уметь быстро изобразить график функции, правильно отразив её особенности: область определения и область значений, промежутки возрастания и убывания, экстремумы, особые точки, асимптоты. Этот навык может серьезно помочь как

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.ru
konf-zal@mail.ru

при выполнении тестовой части экзамена (например, №7, №10, №12), так и особенно при решении задач повышенного и высокого уровней сложности.

В данном уроке мы показываем, как научить школьника построению графика функции путем пошагового преобразования «стандартной» параболы или «стандартной» синусоиды. При этом мы используем следующие преобразования: сдвиг вдоль горизонтальной или вертикальной координатной оси, сжатие или растяжение вдоль одной из осей, а также инверсию относительно горизонтальной или вертикальной оси. Если первые два типа преобразований в некоторой мере применяются в образовательном процессе в непрофильных классах, то преобразования инверсии используются в школьной практике очень редко.

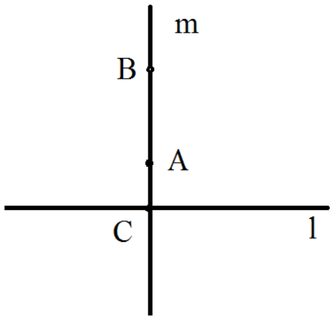

Рис. 1

Определение. Рассмотрим прямую l и точку A, не принадлежащую этой прямой: $A \notin l$ (рис. 1). Пусть прямая m перпендикулярна прямой l: $m \perp l$ и пересекает ее в точке C: $m \cap l = C$. Пусть точка $B \in m$: $|AC| \cdot |BC| = 1$. Тогда точка B называется инверсной точке A относительно прямой l. Прямая l называется осью инверсии. Обозначается $B = \Im_l(A)$.

Свойства преобразования инверсии

1. Если точка B инверсна точке A относительно прямой l, то и точка A инверсна точке B относительно прямой l:
   $\left(B = \Im_l(A)\right) \Leftrightarrow \left(A = \Im_l(B)\right)$.
2. Точки, принадлежащие оси инверсии, инверсных себе не имеют:
   $(A \in l) \Rightarrow (\Im_l(A) = \varnothing)$
3. Точки, находящиеся на расстоянии 1 от оси инверсии, являются инверсными сами себе:

$(|AC| = 1) \Longrightarrow (\mathfrak{I}_l(A) = A)$.

Введенное таким образом понятие инверсии можно применить для построения графиков различных функций.

Теорема 1. Пусть графиком функции $y = f(x)$ является множество точек Γ_f на координатной плоскости XOY. Тогда графиком функции $y = g(x)$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ является множество Γ_g, состоящее из точек, инверсных точкам графика $y = f(x)$ относительно оси OX.

Доказательство.

$$\left(A(x_0, y_0) \in \Gamma_f\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D(f) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases} \xRightarrow{y_0 \neq 0} \begin{cases} x_0 \in D(g) \\ \dfrac{1}{y_0} = \dfrac{1}{f(x_0)} \end{cases} \Leftrightarrow \left(B\left(x_0, \frac{1}{y_0}\right) \in \Gamma_g\right)$$

$$\overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} B = \mathfrak{I}_{OX}(A)$$

Задача 1. Построить график функции $y = \frac{1}{\sin x}$, найти область определения и область значений этой функции, наибольшее и наименьшее значение, промежутки возрастания и убывания, точки экстремумов и асимптоты.

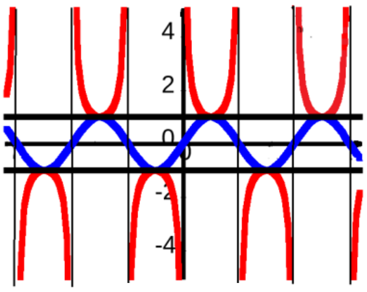

Рис. 2

Решение. Сначала строим график функции $y = \sin x$, на рис. 2 он изображен синусоидой синего цвета. Далее, согласно теореме 1, заключаем, что графиком функции $y = \frac{1}{\sin x}$ является множество точек, инверсных относительно оси OX к точкам графика функции $y = \sin x$. Для проведения преобразования инверсии проводим две прямые, отстоящие от оси OX на расстоянии 1. На рис. 2 это черные линии $y=-1$ и $y=1$. Координата x всех точек графика при преобразовании инверсии сохраняется неизменной. Точки синей синусоиды, лежащие на черных прямых, т.е. точки вида $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ при преобразовании инверсии переходят в себя. Здесь и везде далее k - любое целое число: $k\in\mathbb{Z}$. Точки, имеющие абсциссы из промежутков $(2\pi k,(2k+1)\pi)$ отображаются в точки, имеющие координату y из промежутка $[1,\infty)$, точки с абсциссами из промежутков $\left((2k-1)\pi,2\pi k\right)$ отображаются в точки с координатами y из промежутка $(-\infty,-1]$, наконец, точки синей синусоиды, лежащие на оси $OX\colon x=\pi k$, при преобразовании инверсии относительно оси OX образов не имеют. Окончательно, мы получаем график, изображенный на рис. 2 красным цветом.

В соответствии с этим графиком опишем свойства функции:

1. Область определения $D\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\{\mathbb{R}\backslash x=\pi k\}$.
2. Область значений $E\left(\frac{1}{\sin x}\right)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, наибольшего и наименьшего значения нет.
3. Промежутки возрастания $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,(2k+1)\pi\right),\left((2k-1)\pi,-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$.
4. Промежутки убывания$\left(2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,2\pi k\right)$.
5. Максимумы достигаются в точках $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, максимальные значения функции равны -1.
6. Минимумы достигаются в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, минимальные значения функции равны 1.
7. Вертикальные асимптоты $x=\pi k$.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.ru
konf-zal@mail.ru

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}-1}$, найти область определения и область значений этой функции, наибольшее и наименьшее значение, промежутки возрастания и убывания, точки экстремумов и асимптоты.

Решение. График этой функции будем строить пошагово.

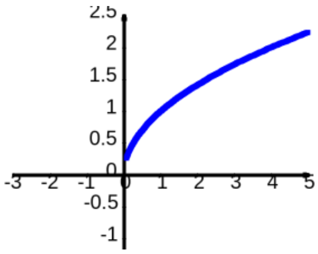

Рис. 3

Первый шаг (рис. 3) - строим график функции $y = \sqrt{x}$.

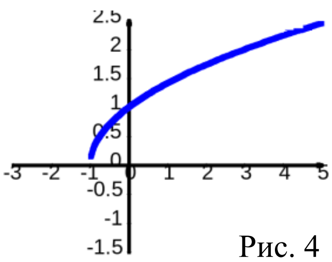

Рис. 4

Второй шаг (рис. 4) – осуществляем преобразование сдвига вдоль оси OX на одну единицу влево. Получаем график функции $y = \sqrt{x+1}$.

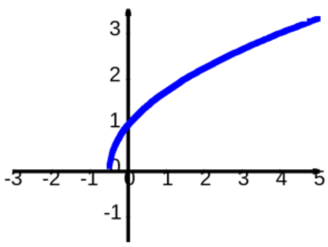

Рис. 5

Третий шаг (рис. 5) – производим сжатие вдоль оси OX в два раза. Получаем график функции $y = \sqrt{2x+1}$.

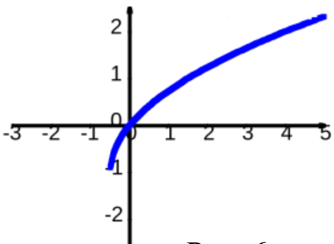

Рис. 6

Четвертый шаг (рис. 6) – сдвиг вдоль оси OY на одну единицу вниз и приходим к графику функции $y = \sqrt{2x+1} - 1$.

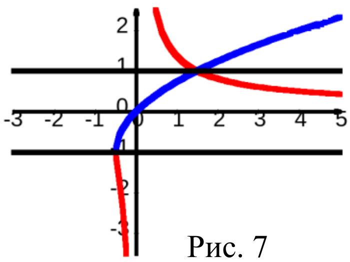

Рис. 7

Пятый шаг (рис. 7) –осуществляем преобразование инверсии относительно оси OX и получаем график функции $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}-1}$, изображенный красным цветом. Вид этого графика позволяет нам перечислить свойства функции:

1. Область определения функции $D\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}-1}\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,\infty)$.
2. Область значений функции $E\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}-1}\right)=(-\infty,-1]\cup(0,\infty)$, наибольшего и наименьшего значения нет.
3. Промежутки убывания функции $\left[-\frac{1}{2},0\right)$, $(0,\infty)$.
4. Промежутков возрастания нет.
5. Функция экстремумов не имеет.
6. Вертикальная асимптота совпадает с осью OY.

Теорема 2. Пусть графиком функции $y=f(x)$ является множество точек Γ_f на координатной плоскости XOY. Тогда графиком функции $y=g(x)$, $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ является множество Γ_g, состоящее из точек, инверсных точкам графика $y=f(x)$ относительно оси OY.

Доказательство.

$$\left(A(x_0,y_0)\in\Gamma_f\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\in D(f)\\ y_0=f(x_0)\end{cases}\overset{x_0\neq 0}{\Longrightarrow}\begin{cases}\frac{1}{x_0}\in D(g)\\ y_0=f\left(\frac{1}{\frac{1}{x_0}}\right)=g\left(\frac{1}{x_0}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left(B\left(\frac{1}{x_0},y_0\right)\in\Gamma_g\right)$$

$$\overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}B=\Im_{OY}(A)$$

Задача 3. Построить график функции $y = \frac{1-2x}{x^2}$, найти область определения и область значений этой функции, наибольшее и наименьшее значение, промежутки возрастания и убывания, точки экстремумов и асимптоты.

Решение. Сначала преобразуем выражение $y = \frac{1-2x}{x^2}$, к следующему виду $y = \frac{1-2x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1$, из которого становится очевидной возможность применения теоремы 2 для построения графика этой функции с помощью преобразования инверсии относительно оси OY графика функции $y = (x-1)^2 - 1$. График этой функции будем строить пошагово.

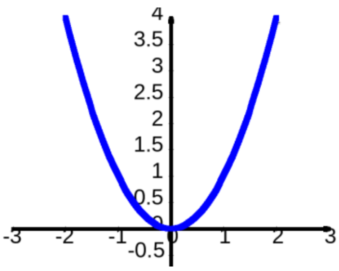

Рис. 8

Первый шаг (рис. 8) - строим график функции относительно оси $y = x^2$.

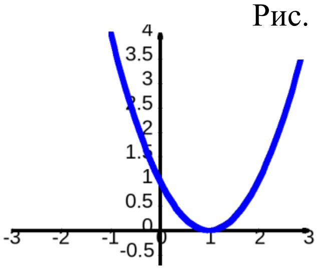

Рис. 9

торой шаг (рис. 9) – осуществляем преобразование сдвига вдоль оси относительно оси OX на одну единицу вправо. Получаем график функции $y = (x-1)^2$.

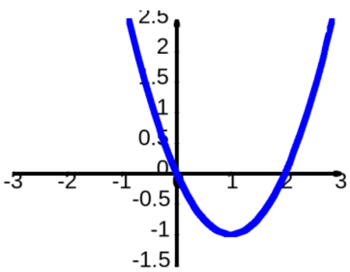

Рис. 10

Третий шаг (рис. 10) – производим сдвиг вдоль оси OY на одну единицу вниз и приходим к графику функции $y = (x-1)^2 - 1$.

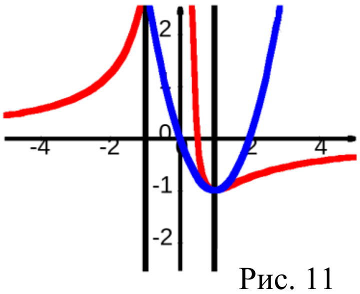

Рис. 11

Четвертый шаг (рис. 11) – осуществляем преобразование инверсии относительно оси OY. Для проведения преобразования инверсии проводим две прямые, отстоящие от оси OY на расстоянии 1. На рис. 11 это черные линии $x = 1$ и $x = -1$. Точки синей параболы, лежащие на черных прямых $x = 1$ и $x = -1$, при преобразовании инверсии преобразуются сами в себя. Координата y всех точек графика при преобразовании инверсии сохраняется неизменной. Точки, имеющие абсциссы из промежутка $x \in (0,1)$ отображаются в точки, имеющие координату x из промежутка $[1,\infty)$. Точки из промежутка $x \in (1,+\infty)$ отображаются в точки с $x \in (0,1)$. Окончательно, получаем график функции, изображенный красным цветом.

Вид этого графика позволяет нам перечислить свойства функции:

1. Область определения функции $D\left(\frac{1-2x}{x^2}\right) = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
2. Область значений функции $E\left(\frac{1-2x}{x^2}\right) = [-1,\infty)$.
3. Наименьшее значение равно -1и достигается в точке $x = 1$.
4. Промежутки убывания функции $(0,1)$.
5. Промежутки возрастания функции $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.
6. Функция имеет минимум, равный -1и достигается в точке $x = 1$, совпадает с наименьшим значением функции.
7. Вертикальная асимптота совпадает с осью OY.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.ru
konf-zal@mail.ru

Задача 4. Построить график функции $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, найти область определения и область значений этой функции, наибольшее и наименьшее значение

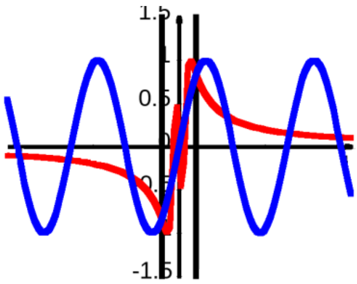

Рис. 12

Решение. Сначала строим график функции $y = \sin x$, на рис. 12 он изображен синусоидой синего цвета. Далее, согласно теореме 2, заключаем, что графиком функции$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ является множество точек, инверсных относительно оси OY к точкам графика функции $x = \sin x$. Для проведения преобразования инверсии проводим две прямые, отстоящие от оси OY на расстоянии 1. На рис. 12 это черные линии $x = 1$ и $x = -1$. Точки синей синусоиды, лежащие на черных прямых $x = 1$ и $x = -1$, при преобразовании инверсии преобразуются сами в себя. Координата y всех точек графика при преобразовании инверсии сохраняется неизменной. Точки, имеющие абсциссы из промежутка $x \in (0,1)$ отображаются в точки, имеющие координату x из промежутка $[1,\infty)$. Точки из промежутка $x \in (1, +\infty)$ образуют бесконечное количество волн исходной синусоиды и они все отображаются в точки с координатами x из промежутка $(0, 1)$. При этом, чем дальше от начала координат отстоит волна синусоиды, тем ближе к началу координат будет ее образ при преобразовании инверсии. Иными словами, график функции $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ совершает бесконечное количество колебаний между значениями $[-1,1]$ и частота этих колебаний неограниченно возрастает при приближении к $x = 0$. Окончательно, мы получаем график, изображенный на рис. 12 красным цветом.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.ru
konf-zal@mail.ru

В соответствии с этим графиком опишем свойства функции:

1. Область определения $D\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \{\mathbb{R} \backslash x = 0\}$.
2. Область значений $E\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = [-1,1]$.
3. Наименьшее значение функции -1.
4. Наибольшее значение функции 1.
5. Максимумы достигаются в точках $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k} = \frac{2}{\pi(4k+1)}$, максимальные значения функции равны 1. В этих же точках достигается и наибольшее значение.
6. Минимумы достигаются в точках $x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} = \frac{2}{\pi(4k-1)}$, минимальные функции равны 1. В этих же точках достигается и наименьшее значение.
7. График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.ru
konf-zal@mail.ru