Всероссийская научно-методическая конференция
"Современная система образования: опыт и перспективы"
июль - сентябрь 2017 года

Захарова Маргарита Юрьевна

Государственное бюджетное образовательное учреждение города Москвы «Лицей №1557»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО ТЕМЕ:
«РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: КОНСУЛЬТАЦИЯ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ, 11 КЛАСС»

Не секрет, что важное место в системе подготовки к ЕГЭ занимает курс тригонометрии и особенно решение тригонометрических уравнений. Однако из года в год количество ошибок при решении задания, связанных с решением тригонометрических уравнений, не уменьшается: это и применение основных формул, для преобразования левой и правой части уравнения и нахождение значений основных тригонометрических функций.

Данная методическая разработка содержит задания, позволяющие повторить основные формулы и приемы решения заданий, предлагаемых на ЕГЭ.

1 этап *Повторение основных формул тригонометрии*

- формулы для решения простейших уравнений;
- формулы сложения, приведения, двойного угла.

$\boldsymbol{cosx} = \mathrm{a}, \boldsymbol{-1 \le a \le 1}$ $\mathrm{x} = \pm \arccos a + 2\pi n$ $n \in Z$	$\boldsymbol{sinx} = \mathrm{a}, \boldsymbol{-1 \le a \le 1}$ $\left[\begin{array}{l} x = arcsina + 2\pi n \\ x = \pi - arcsina + 2\pi n \end{array}\right.$ $n \in Z$	$\boldsymbol{tgx = a, a \in R}$ $x = arctga + \pi n$ $n \in Z$

$\cos x = 1$ $x = 2\pi n$ $n \in Z$	$sinx = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in Z$	$tgx = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in Z$
$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n$ $n \in Z$	$sinx = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in Z$	$tgx = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $n \in Z$
$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$sinx = 0$ $x = \pi n$ $n \in Z$	$tgx = 0$ $x = \pi n$ $n \in Z$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta \pm cos\alpha \cdot sin\beta$$

Далее можно рассмотреть формулы приведения и формулы двойного угла и формулы понижения степени, которые легко получаются из выше приведенных формул.

2 Этап ***Решение основных примеров***

Решите уравнения:

1) $3sin6x - \sqrt{37}cos3x = 0$

применяя формулу двойного угла, раскладываем на множители

$$cos3x\left(6sin3x - \sqrt{37}\right) = 0$$

$$cos3x = 0 \text{ или } sin3x = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z \text{ т. к. } \frac{\sqrt{37}}{6} > 1, \text{решений нет}$$

2) $sin^2x - cos^2x = (cosx - sinx)^2$ Раскроем скобки в правой части равенства $2cos^2x - 2cosx \cdot sinx = 0;\ 2cosx(cosx - sinx) = 0;\ \left[\begin{array}{c} 2cosx = 0 \\ cosx - sinx = 0 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ tgx = 1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$

3) $1 + sin^2 5x = \frac{3}{2} sin10x$; Преобразовав левую часть уравнения, получаем однородное уравнение второй степени

$2sin^2 5x - 3sin5x \cdot cos5x + cos^2 5x = 0;$

$2tg^2 5x - 3tg5x + 1 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} tg5x = 1 \\ tg5x = \frac{1}{2} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{1}{5} arctg\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{5} \end{array}\right., n \in Z$$

3 этап ***Решение тригонометрических уравнений с отбором корней***

Решите уравнение и укажите корни на выбранном промежутке:

1) $4sin^3x - 3sinx + 2\,cos2x + 1 = 0, [-\pi; 0]$

$$(sinx - 1)(4sin^2x - 3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} sinx = 1 \\ sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right.;\ n \in Z$$

Корни, принадлежащие указанному промежутку: $-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

Данное уравнение рекомендую решить самому учителю с полным объяснением. Думаю, что надо начинать с таких примеров, где происходит отбор корней на промежутках «без повторений», а затем можно переходить к более сложным случаям.

2) $3cos^2x - 5sinx - 1 = 0, [-3\pi; -2\pi]$

$$\left[\begin{array}{c} x = arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \\ x = \pi - arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \end{array}\right. ; n \in Z$$

Корней, принадлежащих указанному промежутку, уравнение не имеет.

3) $(\sqrt{2}sinx + 1)(2sinx - 3) = 0, tgx < 0;$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

4) $cos2x + 2 = \sqrt{3}cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\left[\begin{array}{c} sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sinx = \sqrt{3} \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. ; n \in Z$$

Корни, принадлежащие указанному промежутку: $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$.

4 этап *Задачи для самостоятельного решения*

1) $2sin8x + \sqrt{17}sin4x = 0;$

2) $cos^2x - sin^2x = (sinx + cosx)^2;$

3) $3 + cos^2 3x = \frac{7}{2}sin6x;$

4) $3cos2x + 4 = 5sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right];$

5) $cos2x + sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0, \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответы: 1) $\frac{\pi n}{4}, n \in Z;$ 2) $\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in Z;$ 3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{1}{3}arctg\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3}; n \in Z;$ 4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z; \pm\frac{\pi}{3}; \pm arccos\frac{1}{3};$ 5) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$

Список литературы

1. Прокофьев А.А., Кожухов И.Б. Математика. Готовимся без репетитора. Задачи и решения. – М.: Махаон, 2006. – 304с. – (Для школьников и абитуриентов)
2. Саакян С.М. 11 класс: экзамен по алгебре и началам анализа. Пособие для учителей и старшеклассников. – М.: Вербум-М, 2001. – 80 с.
3. Ященко И.В., Шестаков С.А., Трепалин А.С., Захаров П.И. ЕГЭ. Математика. Тематическая рабочая тетрадь / И.В. Ященко, С.А. Шестаков, А.С. Трепалин, П.И. Захаров – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2012. – 279, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь»)
4. Семенов А.В. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса. – Москва: Интеллект-Центр МИЭТ, 2015. – 128 с.