Всероссийская научно-методическая конференция
"Методика и педагогическая практика",
октябрь - декабрь, 2017 год

Лебедева Вера Васильевна

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа №1352»

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Содержание.

Введение.

В данной статье была поставлена цель изучить свойства взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского и сравнить полученные результаты со взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве Евклида.

В данной работе изучены взаимное расположение прямых в пространстве Лобачевского, в частности, параллельность прямых в пространстве Лобачевского, взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве Лобачевского, в частности, параллельность прямой и плоскости в пространстве Лобачевского, взаимное расположение плоскостей в пространстве Лобачевского, в частности, параллельность плоскостей в пространстве Лобачевского, тем самым определена структура данной работы.

Остановимся несколько подробнее на содержании работы, состоящей из введения, четырех разделов, заключения, библиографии.

Первый раздел посвящен параллельности прямых в пространстве Лобачевского и взаимному расположению прямых в пространстве Лобачевского. Решение поставленных задач, соответствующих теме данного раздела, получено самостоятельно.

Второй раздел посвящен параллельности прямой и плоскости в пространстве Лобачевского, взаимному расположению прямой и плоскости в пространстве Лобачевского. Эта глава вводит понятия конуса параллелей и заградительной плоскости конуса параллелей. Здесь же разобраны решения задач, соответствующие названию второго раздела.

Третий раздел освещает вопросы, связанные с параллельностью плоскостей в пространстве Лобачевского. Так же представлен блок задач, связанный с вопросами данного раздела.

Четвертый раздел рассказывает о взаимном расположении двух плоскостей в пространстве Лобачевского, перечисляет признаки, выражающие условия того, что плоскости пересекаются, параллельны или расходятся.

Данный раздел содержит так же практический блок задач с последующим решением.

Параллельность прямых и плоскостей

в пространстве Лобачевского.

Раздел 1. Параллельность прямых в пространстве.

Взаимное расположение прямых.

В пространстве Лобачевского возможны два случая взаимного расположения прямых: 1) не существует плоскости, содержащей две прямые; 2) существует плоскость, содержащая две прямые.

В первом случае прямые так же, как и в евклидовом пространстве называются скрещивающимися.

Во втором случае возможны три варианта расположения прямых:

1) прямые пересекаются, то есть лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку; 2) прямые параллельны, то есть лежат в одной плоскости не пересекаются и не имеют общего перпендикуляра ([6], с.113); 3) прямые расходятся, то есть лежат в одной плоскости, не пересекаются и не параллельны.

Из теоремы: через любую точку пространства, не лежащую на данной направленной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна; следует, что в пространстве Лобачевского существует бесконечное множество пар параллельных прямых. Ясно, что в каждой плоскости существует бесконечное множество пар расходящихся прямых.

Так же, как и в евклидовом пространстве, в пространстве Лобачевского справедливо следующее утверждение: **если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b – скрещивающиеся прямые.**

Следовательно, в пространстве Лобачевского существует также бесконечное множество пар скрещивающихся прямых.

§1. Параллельные прямые в пространстве. Две ориентированные прямые в трехмерном пространстве Лобачевского называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и если любой луч положительного направления каждой из этих прямых параллелен любому лучу положительного направления другой прямой. Так же, как и на плоскости, параллельность направленных прямых обозначается так: $AA_1 \| BB_1$. Аналогично вводится понятие параллельности двух ненаправленных прямых: две ненаправленные прямые называются *параллельными*, если на этих прямых можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны как направленные прямые.

Докажем теорему о параллельных прямых в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. **Через любую точку пространства, не лежащую на данной направленной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.**

Доказательство.

Рассмотрим прямую AA_1 и точку M, не лежащую на этой прямой. Через точку M и прямую AA_1 проходит одна и только одна плоскость, которую обозначим через ά. По теореме, доказанной в курсе "Геометрия 4" имеем, что в плоскости ά. существует одна и только одна направленная прямая UV, проходящая через точку M и параллельная прямой AA_1. Пусть U'V' - какая-то прямая пространства, проходящая через точку M и параллельная прямой AA_1. Прямые U'V' и AA_1 должны лежать в одной плоскости, которая проходит через точку M. Но через точку M и прямую AA_1 проходит только одна плоскость, плоскость ά., следовательно, прямая U'V' должна лежать в плоскости ά. Прямые U'V' и UV совпадают. ■

Свойство 1.1. При любом движении пространства образы параллельных прямых параллельны.

Доказательство.

Для того чтобы прямые были параллельны необходимо, чтобы любой луч положительного направления каждой из этих прямых был параллелен любому лучу положительного направления другой прямой.

Из свойства параллельных лучей: при любом движении пространства образы двух параллельных лучей параллельны; имеем, что при любом движении пространства образы параллельных прямых параллельны.■

Рассмотрим теорему о взаимном расположении параллельных прямых.

Теорема 2. **Расстояние у от переменной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние принимает все возможные положительные значения.**

Доказательство.

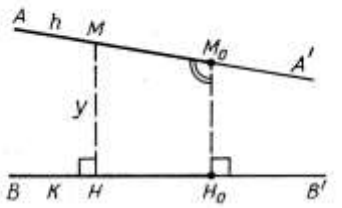

рис. 1

Пусть AA' и BB' - параллельные направленные прямые, M - переменная точка прямой AA', а MH - перпендикуляр к прямой BB'. Из некоторой точки M_0 прямой AA' проведем перпендикуляр M_0H_0 к прямой BB' и рассмотрим двуугольник hM_0H_0k, где h и k соответственно лучи M_0A и H_0B (рис. 1). Заметим, что $<H_0M_0A'$ - угол параллельности, соответствующий отрезку M_0H_0, поэтому он острый, следовательно, $<AM_0H_0$ тупой. К двуугольнику hM_0H_0k применима лемма о двуугольнике: пусть hABk - двуугольник, угол A которого прямой, а угол B прямой или тупой. Пусть, далее, M - переменная точка луча k, MH - перпендикуляр, проведенный к прямой, содержащей луч h, BM=x, MH=f(x). Тогда функция f(x) является монотонной, неограниченно

возрастающей, непрерывной функцией, которая принимает любое значение a, где a>BA; то есть если переменная точка M перемещается по лучу h, удаляясь от точки M_0, то y=MH монотонно неограниченно возрастает. Так как за точку M_0 можно взять любую точку прямой AA', то отсюда мы заключаем, что при перемещении переменной точки M прямой AA' в направлении A'A y=MH монотонно неограниченно возрастает.

Если точка M перемещается по прямой AA' в обратном направлении, то есть в сторону параллельности, то y=MH монотонно убывает.

Докажем теперь, что на прямой AA' всегда существует такая точка M, что перпендикуляр к прямой BB' равен любому данному отрезку $\tilde{\rho}$. Для этого на прямой AA' возьмем точку P так, чтобы перпендикуляр PQ к прямой BB' был больше отрезка $\tilde{\rho}$. Согласно доказанному это возможно. Отложим на луче QP

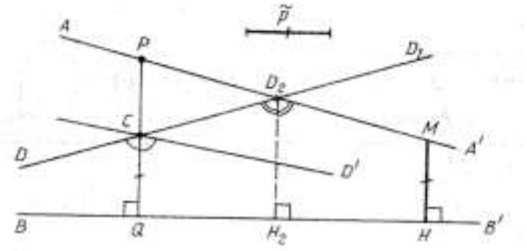

рис. 2

отрезок QC=$\tilde{\rho}$ и через точку C проведем две прямые CD||B'B и CD'||BB'. Углы DCQ и D'CQ являются углами параллельности, соответствующими отрезку CQ, поэтому они равны друг другу и оба угла острые. Отсюда следует, что <PCD' тупой, и так как P-C-Q, то луч CD_1, дополнительный к лучу CD, является внутренним лучом угла PCD'. Так как CD'||BB', BB'||AA', то CD'||AA', поэтому

лучи CD' и PA' параллельны. Следовательно, луч CD_1 пересекает луч PA' в некоторой точке D_2. Итак, D_2A'||BB', D_2D||B'B. Значит по теореме: через точку A, не лежащую на данной прямой a, проходят две и только две прямые, параллельные прямой a, которые симметричны относительно прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a; имеем, что прямые

D_2A' и D_2D симметричны относительно прямой D_2H_2, перпендикулярной к прямой BB' (рис. 2). Если M и H - точки, симметричные точкам C и Q относительно прямой D_2H_2, то, очевидно, MH=ρ˜.

Мы доказали, что расстояние y от переменной точки M прямой AA' до прямой BB' принимает любое положительное значение. Отсюда, учитывая, что при перемещении точки M прямой AA' в сторону параллельности y=MH монотонно убывает, мы заключаем, что при этом перемещении y стремиться к нулю, так как он может принимать значения, меньшие любого сколь угодно малого ε>0.■

Докажем следующее **свойство 1.2.** Если a,b и c,d – произвольные пары параллельных прямых в пространстве (то есть a||b и c||d), плоскости которых не совпадают, то существует движение, при котором прямые a и b переходят соответственно в прямые c и d.

Доказательство:

Пусть точки P∈a, A∈a, точки Q∈b, B∈b, точки R∈c, C∈c, точки S∈d, D∈d. Пусть PQ - перпендикуляр, проведенный из точки P∈a к прямой b. По теореме 2 (о взаимном расположении параллельных прямых) имеем, что существует точка R∈c, такая, что RS⊥d, RS=PQ. Выберем точки A, B, C, D соответственно на прямых a, b, c, d такие, чтобы PA||QB,RC||SD.

Угол параллельности <QPA соответствует отрезку PQ, угол параллельности <SRC соответствует отрезку RS, поэтому <QPA=<SRC.

В силу равенства <PQB=<RSD по аксиоме: если hk - неразвернутый угол и <hk=<h'k', то существует наложение, при котором луч h→h', k→k'; существует наложение f, при котором лучи QP и QB переходят соответственно в лучи SR и SD, поэтому d=f(b). Так как лучи QP=SR, то R=f(P), следовательно, при наложении f луч PQ→луч RS и в силу равенства <QPA=<SRC имеем, что луч PA→луч RC, поэтому c=f(a).

Итак, f - искомое наложение, а любое наложение является движением, значит f - искомое движение. ■

§2. Теорема о транзитивности параллельных прямых.

Теорема о транзитивности параллельных прямых имеет место в любой плоскости пространства. Для доказательства теоремы о транзитивности, сначала докажем лемму о пересекающихся плоскостях, проходящих через параллельные прямые.

Лемма. **Через две направленные параллельные прямые AA' и BB' проведены плоскости α и β, которые пересекаются по прямой c, не совпадающей с данными прямыми. Тогда на прямой c можно выбрать направление CC' так, что AA'||CC' и BB'||CC'.**

<u>Доказательство.</u>

На прямой c возьмем произвольную точку C и другую точку C' так, чтобы точка C' лежала по ту же сторону от плоскости ABC, что и точки A' и B'. Докажем, что CC'||AA'. Для этого достаточно доказать, что лучи CC' и AA' параллельны.

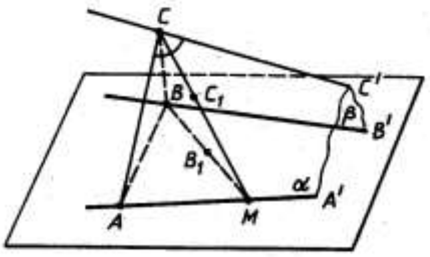

рис. 3

Прямые CC' и AA' лежат в плоскости α и не пересекаются (рис. 3), так как в противном случае через точку пересечения проходила бы прямая BB', что невозможно. Отсюда следует, что и лучи CC' и AA' лежат в одной плоскости и не пересекаются. Докажем, что любой внутренний луч CC_1 угла ACC' пересекает луч AA'. Для этого проведем плоскость BCC_1 и обозначим через BB_1 луч, по которому эта плоскость пересекает полуплоскость с границей BB', содержащую прямую AA'. Луч BB_1 проходит внутри угла ABB' и поэтому в силу того, что лучи AA' и BB' параллельны, пересекает луч AA' в некоторой точке M. Ясно, что через точку M проходит и луч CC_1. Итак, лучи CC' и AA' параллельны, следовательно, CC'||AA. Точно так же можно доказать, что CC'||BB'.■

Теорема 3. **Если две прямые U_1V_1 и U_2V_2 параллельны прямой UoVo, то $U_1V_1||U_2V_2$.**

Доказательство.

В планиметрии доказан случай, когда три прямые лежат в одной плоскости.

Теперь докажем, что эта теорема верна и в том случае, когда прямые не лежат в одной плоскости.

Плоскости $UoVoU_1$ и $U_2V_2U_1$ проходят через параллельные прямые UoVo и U_2V_2, поэтому по предыдущей лемме на прямой, по которой они пересекаются (точка U_1 лежит на прямой), можно выбрать направление U_1V' так, чтобы $U_1V'||UoVo$, $U_1V'||U_2V_2$. Но по условию $U_1V_1||UoVo$, следовательно, по теореме 1 имеем, что прямые U_1V' и U_1V_1 совпадают. Итак, $U_1V_1||U_2V_2$.■

Рассмотрим три прямые, каждые две из которых лежат в одной плоскости, но все три не расположены в одной плоскости. Докажем: а) если каждые две из данных прямых пересекаются, то эти прямые имеют общую точку; б) если две из данных прямых параллельны, то третья прямая параллельна каждой из них.

Доказательство:

а) Докажем методом от противного.

Пусть a, b, c не имеют общую точку, тогда $a\cap b=A$, $b\cap c=B$, $a\cap c=C$, следовательно, все три прямые a, b, c лежат в одной плоскости, что противоречит условию задачи.■

б) Пусть a||b, тогда по лемме о пересекающихся плоскостях, проходящих через параллельные прямые: через две направленные параллельные прямые AA' и BB' проведены плоскости α и β, которые пересекаются по прямой c, не совпадающей с данными прямыми. Тогда на прямой c можно выбрать направление CC' так, что AA'||CC' и BB'||CC'; имеем, что c||a, c||b.■

Пусть одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость α. Покажем, что вторая прямая не пересекает плоскость α.

Доказательство:

Для доказательства рассмотрим неразвернутый угол AOB. Проведем плоскость α так, чтобы прямая a пересекала плоскость α в точке O. Рассмотрим заградительную прямую l угла AOB такую, что a||l. Имеем, что l расположена внутри угла AOB, l не пересекает плоскость α, но по условию a||l.■

Раздел 2. Параллельность прямой и плоскости.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

В пространстве Лобачевского возможны следующие четыре случая взаимного расположения прямой и плоскости: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая пересекает плоскость, то есть имеет с ней только одну общую точку; в) прямая параллельна плоскости; г) прямая не имеет общих точек и не параллельна ей, то есть прямая расходится с плоскостью.

§3. Параллельность прямой и плоскости. Говорят, что прямая *лежит в плоскости*, если все точки прямой лежат в плоскости. Из аксиомы: если две точки прямой лежат в плоскости, то все очки прямой лежат в этой плоскости; следует, что если хотя бы две точки прямой лежат в данной плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Поэтому, так же как и в евклидовом пространстве, прямая, не лежащая в плоскости, не может иметь с плоскостью более чем одну общую точку. **Определение.** Прямая называется *параллельной плоскости,* если она не лежит в плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: a||α .

Прямая, параллельная плоскости, не имеет общих точек с плоскостью, так как в противном случае их общая точка должна лежать и на прямой, лежащей в плоскости и параллельной данной, что невозможно. Рассмотрим некоторые свойства параллельности прямой и плоскости.

Свойство 3.1. Если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a.

Доказательство.

Так как a||α, то в плоскости α существует прямая l, такая, что a||l или AA'||LL', где AA' и LL' - прямые a и l с выбранными на них направлениями параллельности. Пусть β - произвольная плоскость, проходящая через прямую AA' и пересекающая плоскость α по прямой b. Представляет интерес тот случай, когда b и l - различные прямые. Плоскости α и β пересекаются по прямой

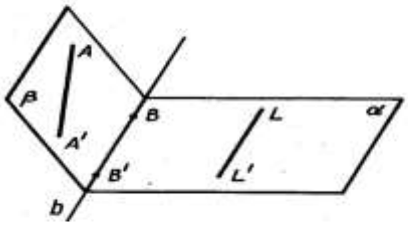

рис. 4

b и проходят через параллельные прямые AA' и LL' (рис. 4), поэтому согласно лемме §2 имеем, что на прямой b можно выбрать направление BB' так, что AA'||BB'.■

Из хода доказательства свойства 3.1. следует, что если a||α и l - любая прямая плоскости α, параллельная прямой a, то на прямой a направление параллельности a||l не зависит от выбора прямой l. Другими словами, если a||α, то на прямой a единственным образом определяется направление, которое назовем направлением параллельности: a||α.

Свойство 3.2. Прямая a параллельна плоскости α. Покажем, что если b - произвольная прямая плоскости α, не принадлежащая пучку параллельных прямых, определяемому прямой a, то a и b - скрещивающиеся прямые.

Доказательство:

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Докажем методом от противного.

Пусть a, b не скрещиваются, следовательно, существует плоскость их содержащая, а значит a и b параллельны. Но по условию прямая b не принадлежит пучку параллельных прямых, определяемому прямой a. Следовательно, предположение неверно, а значит a и b – скрещивающиеся прямые.■

Свойство 3.3. Через прямую a, параллельную данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной. Эта плоскость пересекает данную плоскость по прямой, параллельной прямой a.

Как известно, на плоскости Лобачевского выполняются следующее: свойство 3.1. если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a; теорема: через прямую, не перпендикулярную к данной плоскости, в частности через прямую, лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной плоскости; что непосредственно объясняет свойство 3.3.

Свойство 3.4. Если прямая BB' и плоскость α параллельны прямой AA', то либо $BB' \| \alpha$, либо $BB' \subset \alpha$.

Доказательство.

Предположим, что $BB' \not\subset \alpha$, и докажем, что $BB' \| \alpha$. Так как $AA' \| \alpha$, то в плоскости α существует прямая LL', такая, что $LL' \| AA'$. По теореме 3 §2 имеем, что $BB' \| LL'$, поэтому $BB' \| \alpha$.■

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. **Если прямая a параллельна плоскости α, то через каждую точку плоскости α проходит одна и только одна направленная прямая, параллельная прямой a, причем все эти прямые лежат в плоскости α и образуют пучок Ω параллельных прямых этой плоскости.**

Доказательство.

Пусть M - произвольная точка плоскости α. Точка M не лежит на прямой a, поэтому через эту прямую и точку M проходит плоскость β, которая пересекает плоскость α по некоторой прямой l, проходящей через точку M. По свойству 3.1. имеем l||a. По теореме 1 §1 имеем, что l - единственная прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой a.

Обозначим через Ω множество всех направленных прямых плоскости α, каждая из которых параллельна прямой a. Обозначим через l_0 одну из прямых этого множества. Тогда если l - произвольная прямая множества Ω, отличная от l_0, то l_0||a, l||a, поэтому по теореме 3 §2 множество Ω есть пучок параллельных прямых прямой a.■

Пучок Ω, о котором говорится в рассмотренной теореме, будем называть пучком параллельных прямых плоскости α, определяемым прямой a.

Следствие. *Если прямая l лежит в плоскости α, параллельной прямой a, и не принадлежит пучку параллельных прямых, определяемому прямой a, то a и l - скрещивающиеся прямые.*

Рассмотрим теорему о взаимном расположении прямой и параллельной ей плоскости.

Теорема 2. **Расстояние y от переменной точки направленной прямой до плоскости, которой она параллельна, монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние принимает все возможные положительные значения.**

Доказывается с применением свойства: плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, а прямая MN проходит через некоторую точку N плоскости α. Прямая MN перпендикулярна к плоскости β тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости α и перпендикулярна к прямой c.

§4. Свойства прямой, расходящейся с плоскостью.

В разделе 2 описаны четыре случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве Лобачевского. Напомним случай расхождения прямой и плоскости. Прямая расходится с плоскостью, если прямая не имеет общих точек с плоскостью и не параллельна ей.

Справедлива следующая лемма, которая является признаком расхождения прямой с плоскостью.

Лемма. **Если прямая a не лежит в плоскости α и расходится с некоторой прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a расходится с плоскостью α.**

Доказательство.

Доказывать будем от противного.

Пусть прямая a параллельна плоскости α, тогда по свойству параллельности прямой и плоскости 3.1.: если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a; имеем противоречие с условием леммы, значит предположение неверно, следовательно, прямая a расходится с плоскостью α.■

Докажем теперь теорему о взаимном расположении прямой и плоскости. Будем использовать обозначение: П(AH) – функция Лобачевского, то есть величина острого угла параллельности отрезка AH.

Теорема 3. **Из точки A прямой AA_1 проведен перпендикуляр AH к плоскости α, причем $<A_1AH$ острый или прямой. Тогда если $A_1AH<П(AH)$, $A_1AH=П(AH)$, $A_1AH>П(AH)$, то прямая AA_1 соответственно пересекает плоскость α, параллельна этой плоскости или расходится с ней.**

Доказательство.

Проведем плоскость A_1AH и обозначим через HH_1 прямую, по которой эта плоскость пересекает плоскость α, причем обозначения выбраны так, что A_1, H_1—AH (рис. 5). Далее в плоскости A_1AH проведем луч AB, параллельный лучу HH_1. Так как $<AHH_1$ прямой, то BAH=П(AH). Если $A_1AH<П(AH)$, то есть если $A_1AH<BAH$, то AA_1- внутренний луч угла BAH, поэтому этот луч пересекает луч HH1, следовательно, прямая AA_1 пересекает плоскость α. Если $A_1AH=\Pi(AH)=<BAH$, то лучи AA_1 и AB совпадают, поэтому $AA_1||HH_1$, то есть $AA_1||\alpha$. Если, наконец, $A_1AH>\Pi(AH)=BAH$, то луч AB - внутренний луч угла HAA_1, поэтому AA_1 и HH_1- расходящиеся прямые ($<HAA_1$ острый или прямой). По предыдущей лемме прямая AA_1 расходится с плоскостью α.■

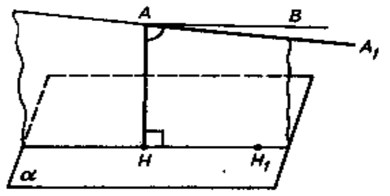

рис. 5

Из этой теоремы непосредственно следует, что существует бесконечное множество прямых, каждая из которых расходится с данной плоскостью.

Теорема 4. **Если прямая расходится с плоскостью, то они имеют один и только один общий перпендикуляр. Расстояния от точек прямой до плоскости монотонно и неограниченно растут по мере удаления переменной точки прямой от основания общего перпендикуляра по обе стороны.**

Доказательство.

Пусть a и α – данные прямая и плоскость. Проведем через прямую a плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (это можно сделать, опираясь на теорему: через прямую, не перпендикулярную к данной плоскости, в частности через прямую, лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной плоскости) и обозначим через l прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. Так как прямая a расходится с плоскостью α, то a и l - расходящиеся прямые, поэтому они имеют общий перпендикуляр AL, где $A\in a$, $L\in l$. По свойству перпендикулярности прямой и плоскости имеем, что $AL\perp\alpha$. Итак, AL - общий перпендикуляр прямой a и плоскости α. Предположим теперь, что прямая a и плоскость α имеют еще один общий перпендикуляр $A'L'$, где $A' \in a$, $L' \in l$. По свойству перпендикулярности прямой и плоскости имеем, что $A'L' \perp l$. Мы пришли к противоречию с теоремой[1] из планиметрии. По свойству перпендикулярности прямой и плоскости каждый общий перпендикуляр прямых a и l является общим перпендикуляром прямой a и плоскости α, поэтому второе утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы из планиметрии.■

Пусть прямая a расходится с плоскостью α. Докажем, что любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, которая расходится с прямой a.

<u>Доказательство:</u>

Докажем методом от противного.

Пусть a и b не расходятся, то есть возможны два случая:

1) a и b - пересекающиеся прямые;

2) a и b - параллельные прямые.

Рассмотрим 1) случай. Пусть $a \cap b = c$, $b \in \alpha$ (по условию), $c \in \alpha$, следовательно, a имеет с α общую точку, но по условию a расходится с α. Значит этот случай не возможен.

Рассмотрим 2) случай. Пусть $a \| b$. По свойству: если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a; имеем, что $a \| b$, $b \in \alpha$ (по условию), следовательно, $a \| \alpha$. Но по условию задачи прямая a расходится с плоскостью α, следовательно, предположение о том, что $a \| b$ ложно. Значит a и b - расходящиеся прямые.■

Рассмотрим точки A и B прямой AB, которые лежат по одну сторону от плоскости α и равноудалены от этой плоскости. Покажем, что прямая AB расходится с плоскостью α.

Доказательство:

Докажем методом от противного.

Пусть AB не расходится с плоскостью α, то есть 1)AB пересекает α, или 2) AB$\|\alpha$.

1)Пусть AB пересекает α, что противоречит условию задачи.

2)Пусть AB$\|\alpha$, следовательно, по теореме: расстояние y от переменной точки направленной прямой до плоскости, которой она параллельна, монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние принимает все возможные положительные значения, получаем противоречие с условием задачи.

Из пунктов 1),2) следует, что AB расходится с плоскостью α.■

Если прямая расходится с плоскостью, то длина их общего перпендикуляра называется *расстоянием от прямой до плоскости*.

Покажем, что расстояние от прямой до плоскости, с которой прямая расходится, меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, один конец которого лежит на прямой, а другой конец - в плоскости.

Доказательство:

$l \in \beta$, $Q \in l$, $PQ \in \beta$ (по условию). Проведем плоскость α такую, чтобы $a \in \alpha$, $PQ \in \alpha$, $\alpha \perp \beta$. По свойству перпендикулярности плоскостей: плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, а прямая MN проходит через некоторую точку N плоскости α. Прямая MN перпендикулярна к плоскости β тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости α и перпендикулярна к c; имеем, что каждый общий перпендикуляр прямых a и l является общим перпендикуляром прямой a и плоскости α. Поэтому по теореме: две расходящиеся прямые имеют один и только один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они монотонно неограниченно удаляются друг от друга; имеем, что расстояние d от прямой a до расходящейся с ней плоскости β меньше длины любого отрезка, отличного от PQ, один конец которого P лежит на прямой a, а другой конец Q лежит в плоскости β.■

§5. Конус параллелей. Пусть точка A не лежит в плоскости α, а AH - перпендикуляр, проведенный к этой плоскости. Рассмотрим множество всех прямых, проходящих через точку A, каждая из которых параллельна плоскости α. Это множество является бесконечным. Согласно теореме 3 §4: из точки A прямой AA_1 проведен перпендикуляр AH к плоскости α, причем $<A_1AH$ острый или прямой. Тогда если $A_1AH<\Pi(AH)$, $A_1AH=\Pi(AH)$, $A_1AH>\Pi(AH)$, то прямая AA_1 соответственно пересекает плоскость α, параллельна этой плоскости или расходится с ней; все прямые этого множества наклонены под одним и тем же острым углом φ к перпендикуляру AH, где $\varphi=\Pi(AH)$. Отсюда мы заключаем, что рассматриваемое множество прямых есть круговой конус с вершиной A и осью AH. Этот конус называется *конусом параллелей* к плоскости α в точке A (рис. 6).

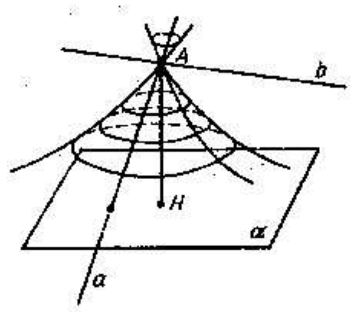

рис. 6

Очевидно, все образующие этого конуса параллельны плоскости α. Плоскость α перпендикулярна к оси конуса и не пересекает его образующие, поэтому ее можно назвать *заградительной плоскостью* конуса параллелей к ней.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Докажем, что любая прямая, проходящая через вершину A конуса параллелей к плоскости α, пересекает плоскость α, если прямая проходит внутри конуса параллелей; и расходится с плоскостью α, если она проходит вне конуса параллелей.

<u>Доказательство:</u>

Проведем плоскость A_1AH, HH_1 - прямая, по которой плоскость A_1AH пересекает плоскость α, причем A_1, H_1—AH. В плоскости A_1AH проведем луч $AB||HH_1$. По условию дан конус параллелей, значит $<AHH_1$ - прямой и $BAH=\pi(AH)$.

Пусть a проходит внутри конуса параллелей, то есть AA_1 проходит через вершину A конуса параллелей. AA_1 проходит внутри конуса параллелей. $A_1AH < BAH$, следовательно, прямая $AA_1 \cap \alpha$, значит $a \cap \alpha$.

Пусть a проходит вне конуса параллелей, то есть AA_1 проходит вне конуса параллелей. $A_1AH>\pi(AH)$, следовательно, $A_1AH>BAH$, следовательно, луч AB - внутренний луч$<HAA_1$, поэтому AA_1 и HH_1 - расходящиеся прямые ($<HAA_1$-острый или прямой). По лемме §4: если прямая a не лежит в плоскости α и расходится с некоторой прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a расходится с плоскостью α; имеем, что прямая a расходится с α.■

Раздел 3. Параллельность плоскостей.

§6. Параллельные плоскости. Плоскость α называется *параллельной плоскости* β, если эти две плоскости не имеют общих точек и в плоскости α существует хотя бы одна прямая, параллельная плоскости β ([1], с.237). Из этого определения следует, что в плоскости β также существует прямая, параллельная плоскости α. Следовательно, если $\alpha||\beta$, $\beta||\alpha$, то есть понятие параллельности плоскостей обладает свойством симметричности..

Докажем теорему о параллельных плоскостях. Для этого необходимо доказать лемму, выражающую признак пересечения двух плоскостей в пространстве.

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Лемма. **Если через какую-нибудь точку плоскости α проходят две прямые, лежащие в этой плоскости и параллельные другой плоскости β, то плоскости α и β пересекаются. Прямая пересечения плоскостей параллельна данным прямым.**

<u>Доказательство.</u>

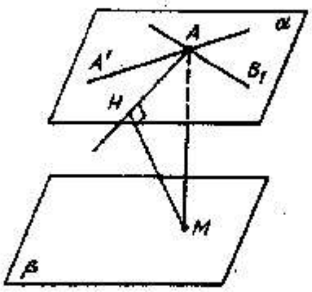

рис. 7

Пусть через точку A плоскости α проходят две прямые A'AM и AB_1, лежащие в этой плоскости и параллельные плоскости β. Проведем перпендикуляр AM к плоскости β и перпендикуляр MH к плоскости α (рис. 7). Угол A'AM является углом параллельности, соответствующим отрезку AM, поэтому он острый. Отсюда следует, что точка H не совпадает с точкой A. Точка H не лежит также на прямых AA' и AB_1. В самом деле, если предположить, например, что $H \in AA'$, то угол A'AM является углом между прямой AM и плоскостью α. Но это противоречит свойству[3], так как прямая AM образует с прямой AB_1 угол B_1AM, равный углу A'AM=П(AM).

Итак, прямая AH не совпадает с прямой AA'. По свойству HAM<A'AM, то есть HAM<П(AM), и, следовательно, по теореме 3 §4 прямая AH пересекает плоскость β. Отсюда и следует, что плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой l. По свойству 3.1.: если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a; имеем, что $AA' \parallel l$ и $AB_1 \parallel l$. ■

Теперь докажем теорему о параллельных плоскостях.

Теорема 1. **Если плоскость α параллельна плоскости β, то через каждую точку плоскости α проходит одна и только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная плоскости β. Множество Ω всех этих прямых образует пучок параллельных прямых плоскости α.**

Доказательство.

Пусть AA' – прямая плоскости α, которая параллельна плоскости β. Это означает, что в плоскости β существует прямая BB', BB'||AA'. Докажем сначала, что через произвольную точку M плоскости α в этой плоскости проходит прямая MM'||β. Представляет интерес только тот случай, когда $M \notin AA'$. Проведем прямую MM'||AA'. Ясно, что $MM' \subset \alpha$, и по теореме 3 §2 MM'|| BB', следовательно, MM'||β.

MM' – единственная прямая плоскости α, проходящая через точку M и параллельная плоскости β. В самом деле, если предположить, что в плоскости α через точку M проходит еще одна прямая MM", параллельная плоскости β, то по предыдущей лемме плоскости α и β пересекаются, что противоречит определению параллельности двух плоскостей.

Остается доказать, что множество Ω образует пучок параллельных прямых плоскости α. Очевидно, $AA' \in \Omega$. Рассмотрим пучок ω параллельных прямых плоскости α, определяемый прямой AA', и докажем, что множества Ω и ω совпадают. Если $XX' \in \Omega$, то XX'||β. Через точку X проведем прямую XX"||AA'. По теореме 3 §2 XX"|| BB', поэтому XX"||β. По доказанному выше прямые XX' и XX" совпадают, то есть $XX' \in \omega$.

Обратно: пусть $YY' \in \omega$, $YY' \neq AA'$. Так как YY'||AA', AA'||β, то по свойству 3.4.: если прямая BB' и плоскость α параллельны прямой AA', то либо BB'||α, либо $BB' \subset \alpha$; имеем YY'|| β, то есть $YY' \in \Omega$.■

Пучок Ω, о котором говорится в теореме 1, будем называть пучком параллельных прямых плоскости α, определяемым параллельной ей плоскостью β.

Следствие. *Если плоскость α параллельна плоскости β, то любая прямая плоскости α, не принадлежащая пучку Ω параллельных прямых, определяемому плоскостью β, расходится с плоскостью β.*

Если $\alpha \| \beta$, то $\beta \| \alpha$, поэтому из доказанной теоремы следует, что через каждую точку плоскости β проходит одна и только одна прямая, параллельная плоскости α, и множество всех этих прямых образует пучок параллельных прямых плоскости β. Таким образом, если $\alpha \| \beta$, то в каждой из плоскостей α и β существует пучок параллельных прямых, определяемый другой плоскостью.

Утверждение. Пусть даны две параллельные плоскости. Покажем, что существуют прямые, каждая из которых перпендикулярна к одной из плоскостей и параллельна другой.

Доказательство:

По теореме 1 §6 через точку $A \in \alpha$ проходит одна и только одна прямая $a \in \alpha$, $a \| \beta$.

Применяя свойство параллельности прямой и плоскости: через прямую a, параллельную данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной. Эта плоскость пересекает данную плоскость по прямой, параллельной прямой a; то есть через прямую a проходит единственная плоскость γ такая, что $\gamma \perp \beta$.

Из свойства следует, что через прямую a $\mid a \in \alpha$, $a \| \beta$, проходит плоскость γ, перпендикулярная к другой плоскости β, $\gamma \perp \beta$.

По лемме: каковы бы ни были параллельные прямые a и b, существует, причем единственная прямая p, перпендикулярная к прямой b и параллельная прямой a; имеем $a \in \alpha$, $b \in \beta$ так, что $a \| b$. Для a и b существует, причем единственная прямая p, перпендикулярная к прямой b и параллельная прямой a.■

Покажем, что при движении пространства: а) сохраняется параллельность прямой и плоскости; б) параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости.

Доказательство:

а) По свойству 1.1. и из определения параллельности прямой и плоскости: прямая называется параллельной плоскости, если она не лежит в плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости; имеем непосредственное следствие того, что сохраняется параллельность прямой и плоскости.■

б) Из определения параллельных плоскостей: плоскость α называется параллельной плоскости β, если эти две плоскости не имеют общих точек и в плоскости α существует хотя бы одна прямая, параллельная плоскости β и из доказанного факта: сохраняется параллельность прямой и плоскости, непосредственно следует, что параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости.■

§7. Теорема существования параллельных плоскостей. Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 2. **Через прямую а, параллельную плоскости *α*, проходит одна и только одна плоскость, параллельная плоскости *α*. Все другие плоскости, проходящие через прямую а, пересекают плоскость *α*.**

Доказательство.

Через прямую а проведем плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (это можно сделать по теореме: через прямую, не перпендикулярную к данной плоскости, в частности через прямую, лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной плоскости), и обозначим через b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β.

Докажем сначала, что через прямую а проходит плоскость, которая не пересекает плоскость α. Для этого через прямую а проведем плоскость γ, перпендикулярную к плоскости β, и докажем, что плоскости α и γ не пересекаются. Пусть, напротив, они имеют общую точку M (рис. 8,а). Ясно, что точка M не лежит на прямых a и b. Проведем в плоскости α перпендикуляр MP к прямой b, а в плоскости γ перпендикуляр MQ к прямой a. По свойству: плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, а прямая MN проходит через некоторую точку N плоскости α. Прямая MN перпендикулярна к плоскости β тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости α и перпендикулярна к прямой c; имеем MP⊥β , MQ⊥β, поэтому MPQ - треугольник с двумя прямыми углами - <P и <Q, что невозможно. Следовательно, плоскости α и γ не могут иметь общих точек и они параллельны.

Докажем теперь, что любая плоскость δ, проходящая через прямую a и отличная от γ, пересекает плоскость α. В плоскости β через какую-нибудь точку A прямой a проведем перпендикуляр AB к прямой b. Тогда по свойству: плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, а прямая MN проходит через некоторую точку N плоскости α. Прямая MN перпендикулярна к плоскости β тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости α и перпендикулярна к прямой c; имеем AB⊥α. Так как a||b по свойству 3.1 на прямых a и b можно взять точки A_1 и B_1 так, чтобы $AA_1 || BB_1$.

Если B∈δ, то δ и α пересекаются, поэтому рассмотрим случай, когда B∉δ. Проведем перпендикуляр BC к плоскости δ (рис. 8,б; на рисунке плоскость γ не изображена). Точка C не лежит на прямой a, так как в противном случае прямая BC принадлежит плоскости β и, следовательно, плоскости γ и β совпадают.

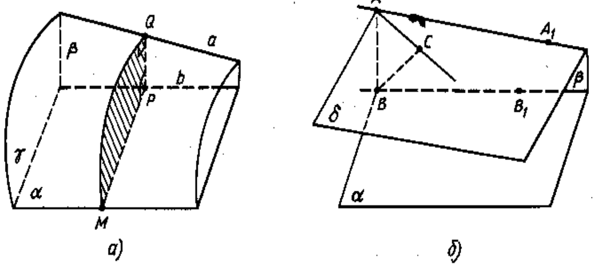

рис. 8

Прямая AB образует с плоскостью δ угол BAC. По свойству: прямая MA проходит через точку A плоскости α и образует с этой плоскостью угол $\varphi_0 \neq 90°$. Тогда φ_0 является наименьшим из всех углов, которые прямая MA образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A; имеем $BAC<BAA_1$, а так как $BAA_1=\Pi(AB)$, то $BAC<\Pi(AB)$. Отсюда согласно теореме 3 §4 прямая AC пересекает плоскость α, следовательно, плоскости α и δ пересекаются.■

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что *существует бесконечное множество пар параллельных плоскостей.*

В самом деле, пусть α - произвольная плоскость, а A - точка, не лежащая на ней. Возьмем произвольную прямую l плоскости α и через точку A проведем прямую m, параллельную прямой l (по теореме 1 §1). Тогда $m||\alpha$, и по доказанной теореме через прямую m проходит плоскость β, $\beta||\alpha$.

Из доказательства теоремы непосредственно следует утверждение.

Следствие. *Если прямая a параллельна плоскости α, то плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α, перпендикулярна к плоскости, которая проходит через прямую a и перпендикулярна к плоскости α.*

Пусть теперь даны две параллельные плоскости. Докажем, что существует одна и только одна плоскость, которая перпендикулярна к одной из данных плоскостей и параллельна другой.

Доказательство:

Так как $\alpha||\beta$ (по условию), то по доказанному утверждению §6 существуют прямые, каждая из которых перпендикулярна к одной из плоскостей α и параллельна другой плоскости β.

По теореме существования параллельных плоскостей существует и притом одна плоскость γ, такая, что $\gamma\perp\alpha$, $\gamma||\beta$.■

Рассмотрим две плоскости α и β, которые перпендикулярны к плоскости γ и пересекают ее по параллельным прямым. Докажем тот факт, что плоскости α и β параллельны.

Доказательство:

1.По условию $a||b$. На прямых можно выбрать точки A_1 и B так, чтобы $AA_1||BB_1$, но $BB_1\in\alpha$ (по условию), $AA_1\notin\alpha$, следовательно $AA_1||\alpha$ (по определению прямой, параллельной плоскости).

2.Применяя следствие параллельности плоскостей: если прямая а параллельна плоскости α, то плоскость, проходящая через прямую а и параллельная плоскости α, перпендикулярна к плоскости, которая проходит через прямую а и перпендикулярна к плоскости α; имеем $a||\alpha$ (по п. 1.), $a\in\beta$ (по условию), значит $\beta||\alpha$. $\beta\perp\gamma$ (по условию), $\gamma | a\in\gamma$, $\gamma\perp\alpha$ (по условию), следовательно $\beta||\alpha$. Из следствия параллельности плоскостей вытекает, что плоскость β существует, причем $\beta||\alpha$.

3. По теореме существования параллельных плоскостей плоскость β единственна.■

§8. Некоторые особенности расположения параллельных плоскостей в пространстве Лобачевского. Сравнивая свойства взаимного расположения параллельных плоскостей в пространстве Лобачевского и в пространстве Евклида, мы можем отметить следующие особенности:

а) В евклидовом пространстве на двух параллельных плоскостях α и β имеется бесконечное множество пар пучков параллельных прямых (один пучок пары принадлежит плоскости α, а другой - плоскости β), таких, что любые две прямые этих пучков параллельны. В пространстве Лобачевского, если $\alpha ||\beta$, то имеется только одна пара параллельных пучков (один пучок пары принадлежит плоскости α, а другой - плоскости β).

б) В евклидовом пространстве расстояния от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости равны друг другу. В пространстве Лобачевского эти расстояния не равны друг другу. Имеет место следующая интересная теорема, которая непосредственно вытекает из теоремы 1 §3 о взаимном расположении прямой и параллельной ей плоскости: если прямая а параллельна плоскости α, то через каждую точку плоскости α проходит одна и только одна направленная прямая, параллельная прямой а, причем все эти прямые лежат в плоскости α и образуют пучок Ω параллельных прямых этой плоскости.

Теорема 3. **Пусть плоскости α и β параллельны, прямая а лежит в плоскости α и параллельна плоскости β. Тогда расстояние у от переменной точки прямой а до плоскости β монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние у принимает любое положительное значение.**

По рисунку 9 видно, что параллельные плоскости α и β асимптотически приближаются друг к другу в направлении параллельности и неограниченно удаляются одна от другой в противоположном направлении.

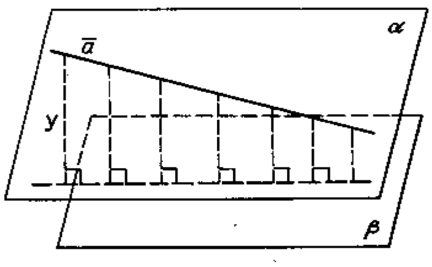

рис. 9

в) В евклидовом пространстве через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, параллельная данной. В отличие от этого, в пространстве Лобачевского через точку А, не лежащую в плоскости α, проходит бесчисленное множество плоскостей, параллельных плоскости α. В самом деле, рассмотрим конус параллелей с вершиной А. Образующие этого конуса параллельны плоскости α, поэтому по теореме 2 §7 имеем, что через каждую образующую конуса проходит плоскость, которая параллельна плоскости α. Каждая из этих плоскостей является касательной к конусу параллельностей. Этих плоскостей бесконечное множество.

г) В евклидовом пространстве если две плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны. В пространстве Лобачевского две плоскости, параллельные третьей, могут пересекаться, быть параллельными и могут быть плоскостями, которые не пересекаются и не параллельны.

Библиография.

1.Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского.- М.: Просвещение, 2001.

2.Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Часть I.- М.: Просвещение, 1987.

3.Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.- М.: Просвещение, 1999.

4.Атанасян Л. С., Гуревич Г. В. Геометрия. Часть II.- М.: Просвещение, 1976.

5.Виленкин Н. Я. и др. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф.- М.: Просвещение: АО "Учеб. лит.", 1996.

6.Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского.- М.: ГИТТЛ, 1953.

7.Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.-2-е изд.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.